

УДК 613.313

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПСЕВДОПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Н. А. Руденко, Ю. В. Ромашихин

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: nikita_rudenko@mail.ru

Рассмотрены особенности формирования осевых симметрий части гармонического сигнала для получения периодического сигнала и его дальнейшего разложения в ряд Фурье. Показана универсальность гармонической аппроксимации для определения косинусных и синусных составляющих, а также значения постоянной составляющей периодического сигнала любого типа. Доказано, что произвольная часть любого периодического сигнала может быть представлена в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными фундаментальной частоте колебаний.

Ключевые слова: ряд Фурье, периодический сигнал, гармонический сигнал, гармоническая аппроксимация, осевая симметрия.

ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПСЕВДОПОЛІГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ У ЗАДАЧАХ ГАРМОНІЧНОГО АНАЛІЗУ

М. А. Руденко, Ю. В. Ромашихин

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: nikita_rudenko@mail.ru

Розглянуто особливості формування осьових симетрій частини гармонічного сигналу для отримання періодичного сигналу та його подальшого розкладання в ряд Фур'є. Показано універсальність гармонічної апроксимації для визначення косинусних і синусних складових, а також значення постійної складової періодичного сигналу любого типу. Доведено, що довільна частина любого періодичного сигналу може бути надана у вигляді суми гармонічних коливань з частотами, кратними фундаментальній частоті коливань.

Ключові слова: ряд Фур'є, періодичний сигнал, гармонічний сигнал, гармонічна апроксимація, осьова симетрія.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. В настоящее время основными потребителями электроэнергии являются электрические машины, среди которых преобладают асинхронные двигатели (АД) [1]. Это объясняется такими явными преимуществами АД, как простота и надежность эксплуатации, возможность регулирования угловой скорости в широком диапазоне, значительной перегрузочной способностью и т.д. Однако, несмотря на достаточно высокие эксплуатационные показатели, АД выходят из строя и подвергаются ремонту [2, 3]. Среди факторов, влияющих на выход АД из строя, можно выделить следующие [4]:

- эксплуатация двигателей в тяжелых или ненормальных режимах работы;
- естественные процессы старения и износа;
- низкое качество обслуживания;
- отклонения при производстве асинхронных двигателей.

Таким образом, в результате проведения ремонтных операций, а также при длительной эксплуатации АД, особенно в тяжелых или ненормальных режимах работы, электромагнитные параметры (ЭМП) двигателей могут отличаться от тех, которые заложены заводом-изготовителем [5]. Поэтому актуальной задачей является разработка метода идентификации ЭМП АД. Среди современных методов можно выделить метод с использованием уравнений баланса составляющих гармоник мгновенной мощности – энергетический метод [6]. Однако для реализации энергетического метода необходимо

использовать источник полигармонического напряжения для формирования необходимого гармонического состава напряжения и тока, а значит и мгновенной мощности. В качестве источников полигармонического напряжения для АД могут выступать преобразователи частоты или тиристорные регуляторы напряжения. Но использование указанных источников приводит к значительному возрастанию стоимостных показателей диагностического оборудования при определении ЭМП АД, поэтому получил развитие энергетический метод идентификации ЭМП АД при питании от источника синусоидального напряжения [7].

В соответствии с [7] гармонические составляющие для формирования уравнений баланса составляющих мгновенной мощности получают путем уменьшения периода разложения синусоидальных сигналов напряжения и тока в ряд Фурье. При этом полученные сигналы напряжения и тока принято называть «псевдополигармоническими». Но следует отметить, что при уменьшении периода разложения возникает постоянная составляющая, которая в синусоидальных сигналах напряжения и тока отсутствует. Поэтому такие сигналы необходимо модифицировать, чтобы скомпенсировать постоянную составляющую. Одним из возможных способов является выполнение операции симметрии полученного псевдополигармонического сигнала [8, 9].

Целью работы является разработка математического аппарата для определения коэффициентов ряда Фурье периодического сигнала или его части, полученной с помощью осевой симметрии.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. К периодическим сигналам относят гармонические и полигармонические сигналы. Для периодических сигналов выполняется следующее условие $f_x(t)=f(t+xT)$, где $x=1, 2, 3, \dots$ – любое целое число (из множества целых чисел N от $-\infty$ до ∞), T – период, являющийся конечным отрезком независимой переменной [10]. В общем виде периодические сигналы могут быть представлены следующим выражением:

$$D_{\Pi} = \{ f_x(t); f(t+xT) = f_x(t), -\infty < t < \infty, x \in N \}. \quad (1)$$

Гармонический сигнал – это сигнал, описываемый функцией синуса или косинуса. Другими словами, гармонические сигналы описываются следующими выражениями:

$$f_a(t) = A \cos(t + \varphi_a); \quad (2)$$

$$f_b(t) = A \sin(t + \varphi_b), \quad (3)$$

где A, j – постоянные величины, которые могут исполнять роль информационных параметров сигнала: A – амплитуда сигнала, j – начальный фазовый угол в радианах. Период одного колебания $T=1/f_o=2\pi/\Omega_o$, где $\Omega_o=2\pi f_o$ – угловая частота функции сигнала в радианах, делённых на секунду; f_o – циклическая частота в герцах. При $j_b=j_a-\pi/2$ синусные и косинусные функции описывают один и тот же сигнал [11].

Полигармонические сигналы являются суммой гармонических колебаний [10, 12]

$$f_a(t) = A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k); \quad (4)$$

$$f_b(t) = A_k \sin(\Omega_k t + \varphi_k); \quad (5)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg(b_k / a_k), \quad (6)$$

или же могут быть выражены функцией $f_k(t) = f(t \pm kT_p)$, $k=1,2,3,\dots$, где $a_k=A_k \cos j_k$ и $b_k=A_k \sin j_k$ – коэффициенты ряда Фурье, A_k – амплитуда k -той гармоники в спектре гармоник; j_k – фазовый угол для k -той гармоники; Ω_k – угловая частота k -той гармоники, T_p – период одного полного колебания сигнала $f(t)$, заданного на одном периоде. Значение $f_p=1/T_p$ называют фундаментальной частотой колебаний.

Полигармонические сигналы представляют собой сумму постоянной составляющей ($f_o=0$) и произвольного (бесконечного) числа гармонических составляющих с любыми

значениями амплитуд A_k и фаз j_k , с частотами, кратными фундаментальной частоте f_p . Другими словами, на периоде фундаментальной частоты f_p , которая равна или кратно меньше минимальной частоты гармоник, вмещается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала. Частотный спектр полигармонических сигналов является дискретным, в связи с чем одним из распространенных математических представлений сигналов являются их спектры, т.е. разложенные сигналы в ряды Фурье [13, 14].

Гармонический метод аппроксимации периодических сигналов основан на разложении периодических функций в ряд Фурье, т.е. периодический сигнал любой произвольной формы может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными фундаментальной частоте колебаний $f_p = 1/T_p$. Для этого нужно разложить один период сигнала в ряд Фурье по тригонометрическим функциям синуса (b_k) и косинуса (a_k), а также постоянной составляющей (a_o), с шагом по частоте, равным фундаментальной частоте колебаний $Df = f_p$ [15]:

$$f(t) = a_o + \sum_{k=0}^K (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)), \quad (7)$$

где $f(t)$ – функция сигнала; Ω – угловая частота с периодом T_p ;

$$a_o = (1/T) \int_0^T f(t) dt; \quad (8)$$

$$a_k = (2/T) \int_0^T f(t) \cos(k\Omega t) dt; \quad (9)$$

$$b_k = (2/T) \int_0^T f(t) \sin(k\Omega t) dt; \quad (10)$$

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_p}. \quad (11)$$

Количество членов ряда Фурье K обычно ограничивается максимальными частотами f_{max} гармонических составляющих в сигналах таким образом, чтобы $f_{max} < Kf_p$. Однако для сигналов с разрывами и скачками $f_{max} \infty$, при этом количество членов ряда ограничивается по допустимой погрешности аппроксимации функции $f(t)$ [16].

Информационными параметрами периодического сигнала могут быть как определенные особенности формы сигнала (размах от минимума до максимума, экстремальное отклонение от среднего значения и т.п.), так и параметры определенных гармоник в этом сигнале. Так, например, для прямоугольных импульсов информационными параметрами могут быть период повторения импульсов, длительность импульсов, скважность импульсов (отношение периода к длительности). При анализе сложных периодических сигналов информационными параметрами могут быть также [17, 18]:

– среднее значение за интервал времени, например, за время периода:

$$(1/T) \int_t^{t+T} f(t) dt; \quad (12)$$

– постоянная составляющая одного периода:

$$(1/T) \int_0^T f(t) dt; \quad (13)$$

– модульное значение функции:

$$(1/T) \int_0^T |f(t)| dt; \quad (14)$$

– среднее квадратичное значение:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}. \quad (15)$$

Согласно теории рядов Фурье, разложение периодического сигнала возможно на произвольном его промежутке, т.е. на любом интервале периодического сигнала, большем, меньшем или равном периоду T [19]. Для разложения части периодического сигнала в ряд Фурье следует выполнить гармоническую аппроксимацию данного интервала. Также необходимо отметить, что аппроксимацию можно выполнить относительно интервала периодического сигнала, большего, меньшего или равного периоду T . Выбранная часть сигнала не является периодическим сигналом, т.к. не имеет периода повторения [20]. Чтобы выполнить аппроксимацию части гармонического или полигармонического сигнала, необходимо получить периодический сигнал с периодом повторения, для этого можно использовать принцип осевой симметрии части периодического сигнала. Выбранная часть сигнала и её симметрия вместе будут образовывать периодический сигнал с периодом повторения T' [11, 12], после чего будет возможно выполнить гармоническую аппроксимацию нужного интервала на периоде T' .

Существуют сигналы и функции, которые обладают определенными видами симметрии. К таким сигналам и функциям относятся следующие: симметричные относительно оси абсцисс, относительно оси ординат и симметричные относительно начала координат [19]. Рассмотрим ниже эти виды симметрий сигналов и функций более детально.

Симметрия – свойство материального объекта совмещаться с самим собой при обмене местами совместно или (и) зеркально равных его частей.

Зеркальная симметрия – симметрия при операции отражения относительно плоскости, а в планиметрии относительно линии. В планиметрии этот тип симметрии называется осевой [21]. Симметрией точки X относительно прямой l называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что l – серединный перпендикуляр к отрезку XX' . Это преобразование называют также осевой симметрией, а l – осью симметрии (рис. 1) [22].

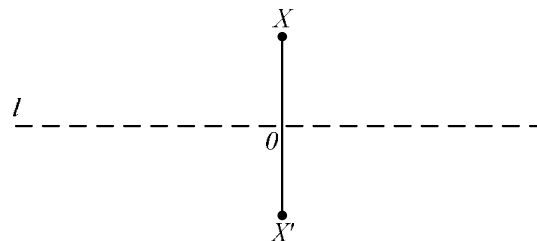


Рисунок 1 – Осевая симметрия точки X относительно оси симметрии l

Различают следующие виды осевых симметрий сигналов и их функций [8].

Осевая симметрия первого рода. При осевой симметрии первого рода функция симметрична относительно оси ординат и удовлетворяет условию $f(t)=f(-t)$, в дальнейшем принято, что $\theta=\Omega t$ (рис. 2).

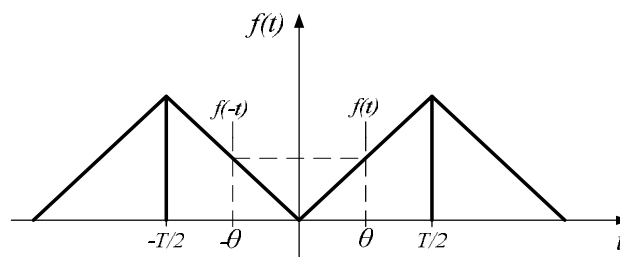


Рисунок 2 – Осевая симметрия первого рода

Осевая симметрия второго рода. В случае осевой симметрии второго рода функция симметрична относительно начала координат и удовлетворяет условию $f(t) = -f(-t)$ (рис. 3).

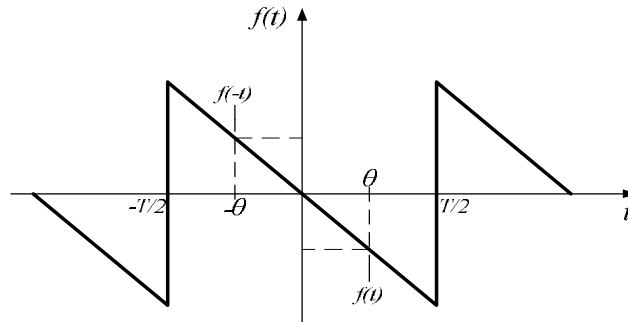


Рисунок 3 – Осевая симметрия второго рода

Осевая симметрия третьего рода со сдвигом. Осевая симметрия третьего рода со сдвигом присутствует в том случае, когда функция симметрична относительно оси абсцисс при смещении ее положительной $[f(t) > 0]$ или отрицательной части $[f(t) < 0]$ на отрезок $T/2$ по оси абсцисс и удовлетворяет условию $f(t) = -f(t + (-T/2))$ (рис. 4).

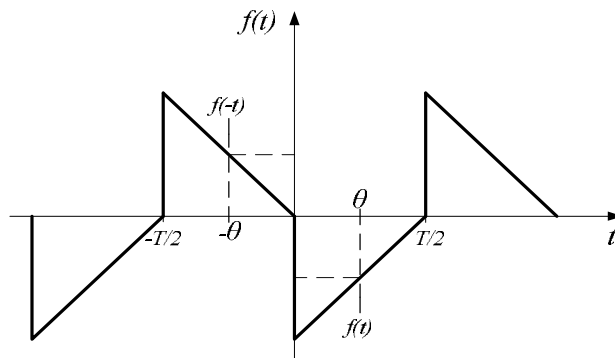


Рисунок 4 – Осевая симметрия третьего рода со смещением

Если $T = 2\pi$, то в разложении функций, обладающих осевой симметрией первого рода, содержатся только постоянная составляющая a_0 и косинусные составляющие гармоник a_k , но отсутствуют синусные составляющие гармоник b_k [9]:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \cos(k\Omega t). \quad (16)$$

При определении коэффициентов ряда Фурье функции обладающей осевой симметрией первого рода и периодом 2π , интегрирование в формулах достаточно выполнить за половину периода:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt; \quad (17)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\Omega t) dt. \quad (18)$$

Если $T = 2\pi$, то в разложении функций, обладающих осевой симметрией второго рода, содержатся только синусные составляющие гармоник b_k и отсутствуют постоянная составляющая a_0 и косинусные составляющие гармоник a_k :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K=\infty} b_k \sin(k\Omega t). \quad (19)$$

При определении коэффициентов ряда Фурье функции, обладающей осевой симметрией второго рода, и периодом 2π интегрирование в формуле достаточно выполнить за половину периода $T/2$:

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\Omega t) dt. \quad (20)$$

В разложении функций, обладающих осевой симметрией третьего рода со сдвигом, содержатся только нечетные гармоники, т.е. синусные и косинусные составляющие:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K=\infty} a_k \cos(k\Omega t) + \sum_{k=1}^{K=\infty} b_k \sin(k\Omega t). \quad (21)$$

Коэффициенты ряда Фурье функции, обладающей осевой симметрией третьего рода со сдвигом, определяются согласно следующим формулам:

$$a_k = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(t) \cos(k\Omega t) dt + \int_{T/2}^T -f\left(t + \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \cos(k\Omega t) dt \right); \quad (22)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(t) \sin(k\Omega t) dt + \int_{T/2}^T -f\left(t + \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \sin(k\Omega t) dt \right). \quad (23)$$

Функция $f(t)$ может обладать одновременно двумя видами осевой симметрии, например, второго рода и третьего рода со сдвигом или первого рода и третьего рода со сдвигом, но не может обладать одновременно осевыми симметриями первого и второго рода. При разложении рассматриваемой функции в ряд Фурье следует выбрать такой угол сдвига фазы сигнала и место проведения оси симметрии, чтобы получить желаемый вид осевой симметрии функции [8, 9].

Таким образом, все рассмотренные виды симметрии можно условно описать с помощью двух понятий:

- «сдвиг» – смещение искомого сигнала вправо (или влево) на полпериода;
- «поворот» – симметричное отображение искомого сигнала относительно продольной или поперечной осей.

В соответствии с введенными понятиями можно выполнять только сдвиг или только поворот искомого сигнала, а также можно одновременно совмещать сдвиг и поворот. На рис. 5 приведены условные обозначения действий при преобразовании искомого сигнала.

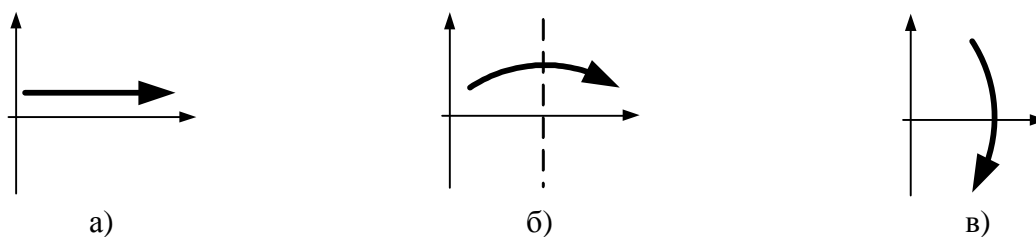


Рисунок 5 – Способы получения псевдополигармонических сигналов при сдвиге сигнала (а), повороте сигнала относительно поперечной (б) или продольной (в) осей

Таким образом, следует выделить возможные варианты получения псевдополигармонических сигналов. Для этого рассмотрим все возможные случаи их получения с учетом введенных понятий. При этом получается четыре вида псевдополигармонических сигналов.

В соответствии с вышеизложенным функцию псевдополигармонического сигнала $f'(t)_{[0,T']}$ для периода повторяемости T' можно представить в виде:

$$f'(t)_{[0,T']} = f(t)_{[0,T'/2]} + f'(t)_{[T'/2,T']}, \quad (24)$$

где $f(t)_{[0,T'/2]}$ – функция искомого сигнала, заданная на первом полупериоде; $f'(t)_{[T'/2,T']}$ – функция, полученная путем сдвига или поворота искомого сигнала и представленная на втором полупериоде.

Первый случай соответствует сдвигу искомого сигнала вправо на величину, равную полупериоду. Это самый простой случай, когда сигнал на каждом периоде имеет такой же вид, как и на первом полупериоде, который выбирается в качестве периода псевдополигармонического сигнала. Если в качестве искомого сигнала выбирается синусоидальный, то его можно представить в виде:

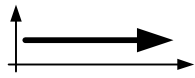
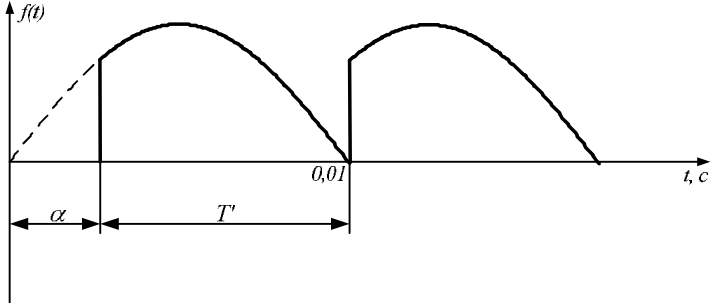
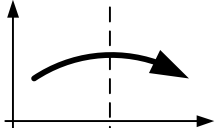
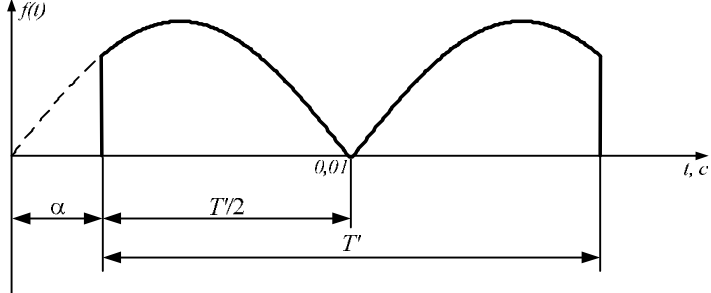
$$f(t)_{[0,T'/2]} = U_m \sin(\Omega t), \quad (25)$$

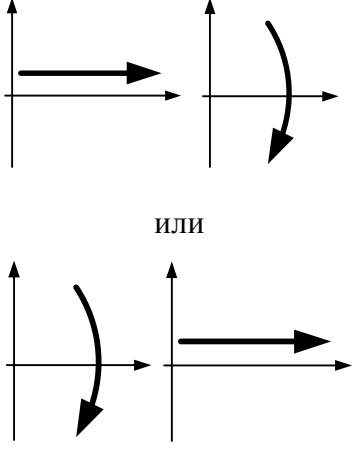
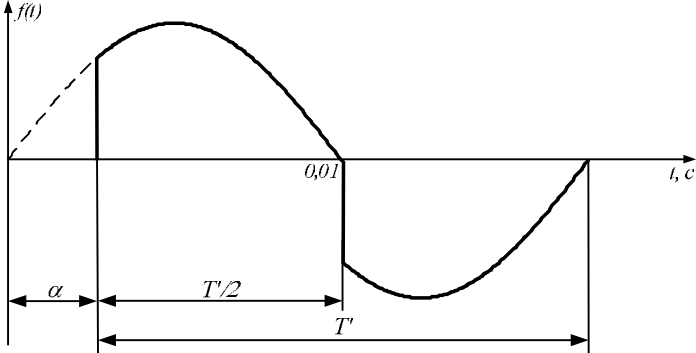
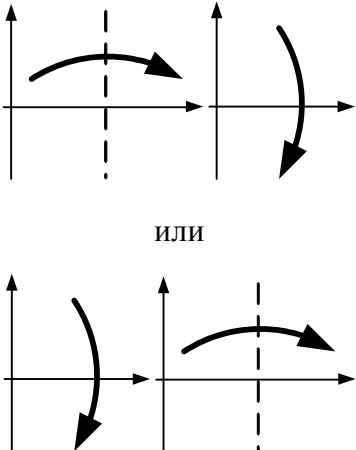
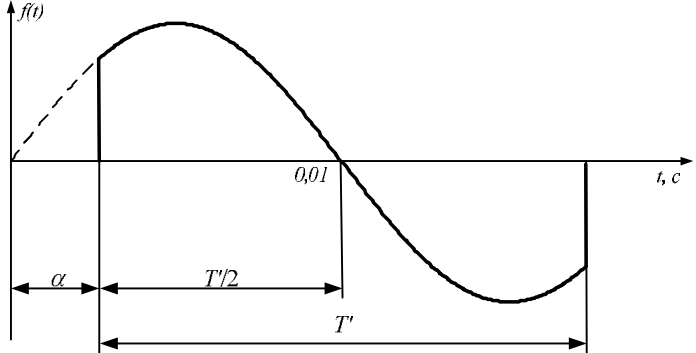
где U_m – амплитуда изменения синусоидального сигнала.

Тогда для получения псевдополигармонического сигнала на первом полупериоде рассматривается участок сигнала с периодом T' . В соответствии с первым случаем получаем периодический сигнал, который имеет вид, представленный в табл. 1.

Второй случай получения псевдополигармонического сигнала соответствует случаю, когда искомым сигнал, заданный на участке $T'/2$, симметрично отражают относительно поперечной оси. При этом полный период псевдополигармонического сигнала составляет T' (табл. 1).

Таблица 1 – Способы получения псевдополигармонических сигналов

№ п/п	Условное обозначение действий при преобразовании искомого сигнала	Вид получаемого псевдополигармонического сигнала
1		
2		

№ п/п	Условное обозначение действий при преобразовании искомого сигнала	Вид получаемого псевдополигармонического сигнала
3		
4		

Рассмотренные два случая получения псевдополигармонических сигналов имеют существенный недостаток, который вызван появлением постоянной составляющей. Но следует учесть, что в исходном сигнале этой составляющей не было, что может привести к существенному искажению информации относительно исходного сигнала. Поэтому возникает необходимость получения таких видов псевдополигармонических сигналов, которые не имели бы постоянной составляющей. Это будет соответствовать третьему и четвертому случаям получения псевдополигармонических сигналов.

Так, для третьего случая искомый сигнал вначале сдвигают вправо, а затем симметрично отражают относительно продольной оси (или вначале симметрично отражают относительно продольной оси, а затем сдвигают вправо). Вид рассмотренного сигнала представлен в табл. 1.

Аналогично можно получить четвертый случай, для которого искомый сигнал вначале симметрично отражают относительно продольной оси, а затем относительно поперечной оси (или вначале симметрично отражают относительно поперечной оси, а затем относительно продольной оси). Вид рассмотренного сигнала представлен в табл. 1.

В соответствии с вышеизложенным, в качестве исходного сигнала можно рассматривать любой сигнал на произвольном промежутке. При этом к этим сигналам применимы все виды

преобразований, рассмотренных выше.

Таким образом, периодические сигналы и функции, обладающие каким-либо видом симметрии, имеют определенные свойства, которые упрощают разложение этих сигналов и функций в тригонометрический ряд.

Рассмотрим случай, когда будет анализироваться часть гармонического сигнала напряжения функции $f(t)=U\sin(\Omega t)$ (рис. 6), где U – амплитуда гармонического сигнала напряжения. Уменьшение полупериода $T/2$ на углы α и β производится с целью получить полупериод $T'/2$, заданный на интервале $[\alpha; \pi-\beta]$, для которого затем будет выполняться операция осевой симметрии.

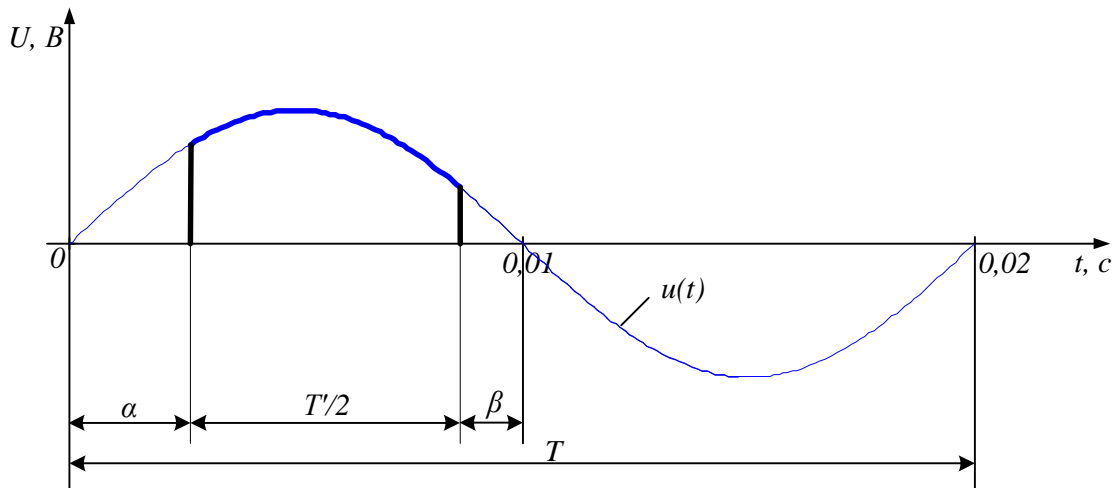


Рисунок 6 – Гармонический сигнал напряжения с функцией $f(t) = U\sin(\Omega t)$ и его часть на периоде T

Рассмотрим ниже примеры получения осевых симметрий гармонического сигнала напряжения, заданного на интервале $[\alpha; \pi-\beta]$.

Осевая симметрия первого рода части гармонического сигнала относительно оси симметрии y' ($f(t)=f(-t)$) (рис. 7). Для получения осевой симметрии первого рода проводится ось симметрии y' параллельно оси ординат через точку $\pi-\beta$, после чего выполняется операция осевой симметрии части гармонического сигнала относительно оси y' .

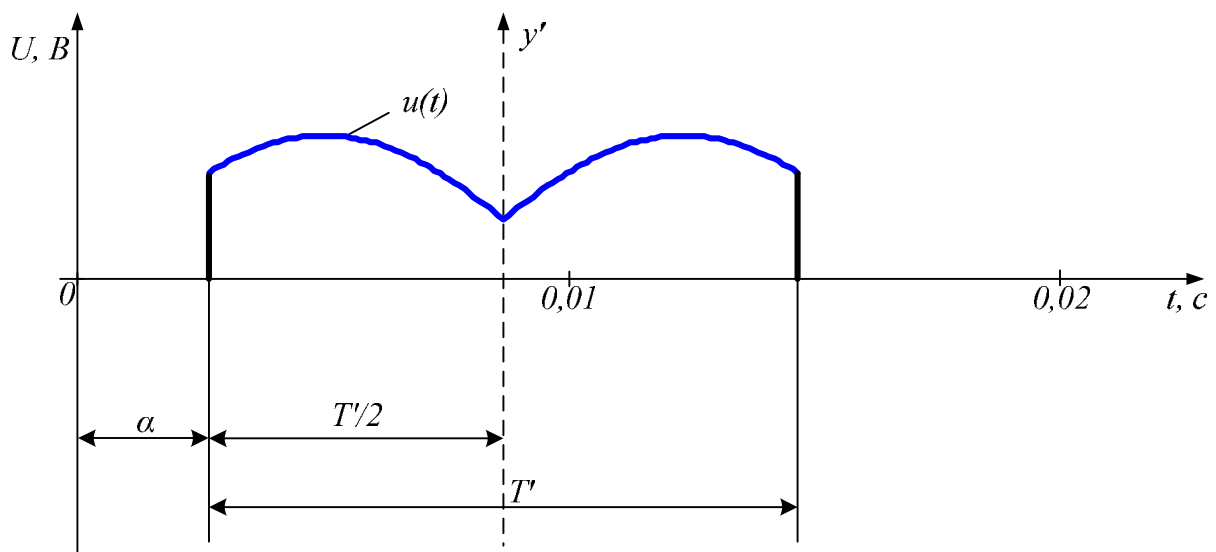


Рисунок 7 – Осевая симметрия первого рода части гармонического сигнала

Так как ось симметрии y' проходит не через ось ординат, а период T' не равен 2π , то для соблюдения условия осевой симметрии первого рода $f(t)=f(-t)$ необходимо ввести угол смещения фазы γ для второго полупериода, заданного на интервале $[\pi-\beta; \pi-\beta+T'/2]$. Тогда математическая форма гармонической аппроксимации на периоде T' будет иметь следующий вид:

$$a_0 = \frac{1}{(2\pi - 2\alpha - 2\beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \cos(\Omega t + \gamma) dt \right) = \frac{U(\cos \alpha + \cos \beta - \sin(\alpha + 2\beta - \gamma) - \sin(\beta - \gamma))}{2\pi - 2\alpha - 2\beta}, \quad (26)$$

$$a_k = \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \cos(k\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \cos(\Omega t + \gamma) \cos(k\Omega t) dt \right) = \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left(-(1+k) \sin(\alpha(1-k) + 2\beta(1-k) + 2k\pi - \gamma) - (1-k) \sin((1+k)\alpha + 2\beta(1+k) - 2k\pi - \gamma) - (1-k) \sin(\beta(1+k) - k\pi - \gamma) - (1+k) \sin(\beta(1-k) + k\pi - \gamma) + (1+k) \cos(\beta(1-k) + k\pi) + (1-k) \cos(\beta(1+k) - k\pi) + (1+k) \cos((1-k)\alpha) + (1-k) \cos((1+k)\alpha) \right); \quad (27)$$

$$b_k = \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \sin(k\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \cos(\Omega t + \gamma) \sin(k\Omega t) dt \right) = \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left((1+k) \cos(\alpha(1-k) + 2\beta(1-k) + 2k\pi - \gamma) - (1-k) \cos(\alpha(1+k) + 2\beta(1+k) - 2k\pi - \gamma) - (1-k) \cos(\beta(1+k) - k\pi - \gamma) + (1+k) \cos(\beta(1-k) + k\pi - \gamma) + (1+k) \sin(\beta(1-k) + k\pi) - (1-k) \sin(\beta(1+k) - k\pi) - (1+k) \sin((1-k)\alpha) + (1-k) \sin((1+k)\alpha) \right), \quad (28)$$

где $T'=2(\pi-\alpha-\beta)$ – период повторения периодического сигнала, образованный частью сигнала и её симметрией.

Осевая симметрия второго рода части гармонического сигнала относительно осей симметрии y' , x' ($f(-t)=-f(t)$). Для формирования симметрии второго рода нужно получить осевую симметрию первого рода части гармонического сигнала относительно оси симметрии y' . Затем вдоль оси абсцисс проводится ось симметрии x' , после чего нужно выполнить операцию осевой симметрии полученного при осевой симметрии первого рода интервала относительно оси x' (рис. 8).

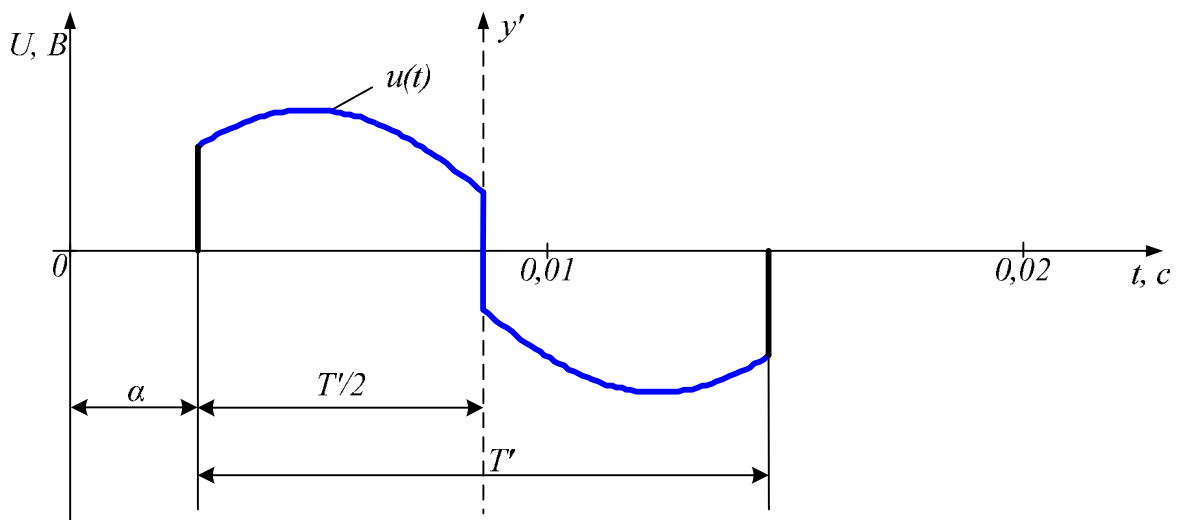


Рисунок 8 – Осевая симметрия второго рода части гармонического сигнала

Исходя из того, что ось симметрии y' проходит не через ось ординат, а период T' не равен 2π , то для соблюдения условия осевой симметрии второго рода $f(-t)=-f(t)$ также необходимо наличие угла γ для второго полупериода. Тогда математическая форма гармонической аппроксимации на периоде T' будет иметь следующий вид:

$$a_0 = \frac{1}{(2\pi - 2\alpha - 2\beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t + \gamma) dt \right) = \frac{U(\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha + 2\beta - \gamma))}{2\pi - 2\alpha - 2\beta}, \quad (29)$$

$$a_k = \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \cos(k\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t + \gamma) \cos(k\Omega t) dt \right) = \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left(-(1+k)\cos(\alpha(1-k) + 2\beta(1-k) + 2k\pi - \gamma) - (1-k)\cos(\alpha(1+k) + 2\beta(1+k) - 2k\pi - \gamma) - (1-k)\cos(\beta(1+k) - k\pi - \gamma) - (1+k)\cos(\beta(1-k) + k\pi - \gamma) + (1+k)\cos(\beta(1-k) + k\pi) + (1-k)\cos(\beta(1+k) - k\pi) + (1+k)\cos((1-k)\alpha) + (1-k)\cos((1+k)\alpha) \right); \quad (30)$$

$$b_k = \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \sin(k\Omega t) dt + \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t + \gamma) \sin(k\Omega t) dt \right) = \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left((1+k)\sin(\alpha(1-k) + 2\beta(1-k) + 2k\pi - \gamma) + (1-k)\sin(\alpha(1+k) + 2\beta(1+k) - 2k\pi - \gamma) + (1-k)\sin(\beta(1+k) - k\pi - \gamma) - (1+k)\sin(\beta(1-k) + k\pi - \gamma) + (1+k)\sin(\beta(1-k) + k\pi) - (1-k)\sin(\beta(1+k) - k\pi) - (1+k)\sin((1-k)\alpha) + (1-k)\sin((1+k)\alpha) \right). \quad (31)$$

Осевая симметрия третьего рода части гармонического сигнала относительно оси x' со сдвигом по оси абсцисс на величину $T'/2$ ($f(t)=-f(t+(-T/2))$). Для получения осевой симметрии третьего рода части гармонического сигнала со сдвигом по оси абсцисс вдоль оси абсцисс проводится ось симметрии x' , после чего выполняется операция осевой симметрии части гармонического сигнала относительно оси x' (осевая симметрия третьего рода), затем полученный при осевой симметрии третьего рода интервал смещается по оси абсцисс на значение $T'/2$ (рис. 9).

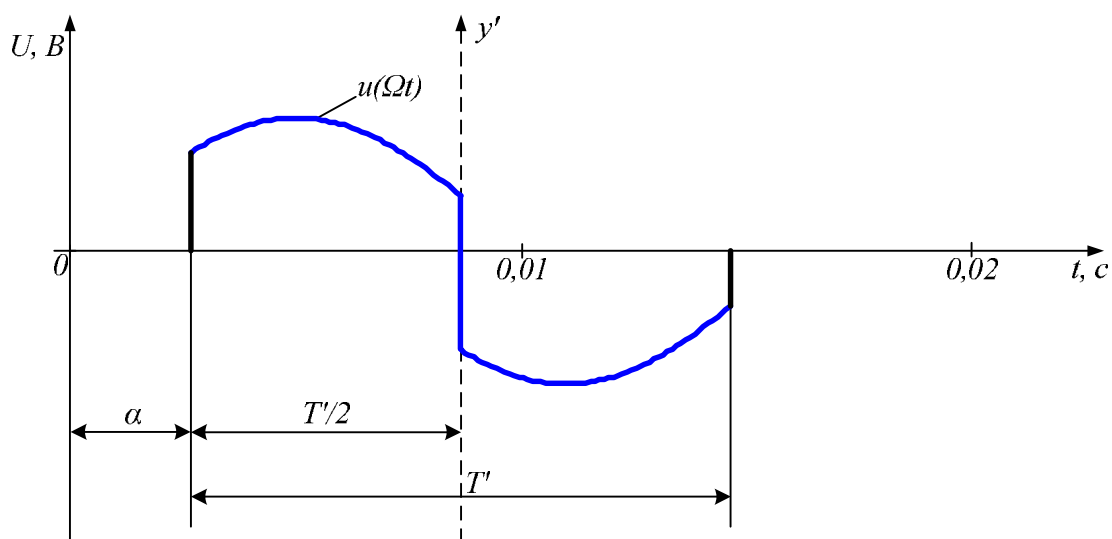


Рисунок 9 – Осевая симметрия третьего рода части гармонического сигнала со сдвигом по оси абсцисс

Исходя из того, что на периоде повторения T' часть гармонического сигнала обладает симметрией третьего рода со сдвигом, то для функции на периоде T' будет выполняться условие $f(t+T'/2)=-f(t)$. Математическая форма гармонической аппроксимации на периоде T' будет иметь следующий вид:

$$a_0 = \frac{1}{(2\pi - 2\alpha - 2\beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) dt - \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t - \pi + \alpha + \beta) dt \right) = 0; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \cos(k\Omega t) dt - \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t - \pi + \alpha + \beta) \cos(k\Omega t) dt \right) = \\ &= \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left(-(1+k) \cos(\beta(1-2k) + 2k\pi - k\alpha) - \right. \\ &\quad \left. -(1-k) \cos(\beta(1+2k) - 2k\pi + k\alpha) - (1-k) \cos((\beta - \pi)k - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. +(1+k) \cos(\beta(1-k) + k\pi) - (1+k) \cos((\beta - \pi)k + \alpha) + (1-k) \cos(\beta(1+k) - k\pi) + \right. \\ &\quad \left. +(1+k) \cos((1-k)\alpha) + (1-k) \cos((1+k)\alpha) \right); \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{(\pi - \alpha - \beta)/\Omega} \left(\int_{\alpha/\Omega}^{(\pi-\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t) \sin(k\Omega t) dt - \int_{(\pi-\beta)/\Omega}^{(2\pi-\alpha-2\beta)/\Omega} U \sin(\Omega t - \pi + \alpha + \beta) \sin(k\Omega t) dt \right) = \\ &= \frac{U}{2(\pi - \alpha - \beta)(1 - k^2)} \left(-(1+k) \sin(\beta(1-2k) + 2k\pi - k\alpha) + \right. \\ &\quad \left. +(1-k) \sin(\beta(1+2k) - 2k\pi + k\alpha) + (1-k) \sin((\beta - \pi)k - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. +(1+k) \sin(\beta(1-k) + k\pi) + (1+k) \sin((\beta - \pi)k + \alpha) - (1-k) \sin(\beta(1+k) - k\pi) - \right. \\ &\quad \left. -(1+k) \sin((1-k)\alpha) + (1-k) \sin((1+k)\alpha) \right). \quad (34) \end{aligned}$$

В результате гармонической аппроксимации на периоде T' была получена часть периодического сигнала, которая существует только на интервале $[\alpha; \alpha+T']$. Данная часть сигнала не является периодическим и гармоническим сигналом, но может быть представлена в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте колебаний $f_p=1/T'$, в работе [23] было предложено называть такие сигналы псевдополигармоническими.

Аналогичными способами возможна гармоническая аппроксимация части периодического сигнала на двух и более периодах для нахождения гармонического состава сигнала, т.е. амплитудных значений его синусных и косинусных составляющих и значения постоянной составляющей сигнала. Но также возможна и гармоническая аппроксимация на произвольном промежутке периода T' [24].

Для осевых симметрий части гармонического сигнала напряжения были получены зависимости косинусной a_k и синусной b_k составляющих от угла α при $U=220$ В, $T'=2(\pi-\alpha-\beta)$, $\beta=\pi/6$. Графики зависимостей косинусных и синусных составляющих от угла α приведены на рис. 10–12.

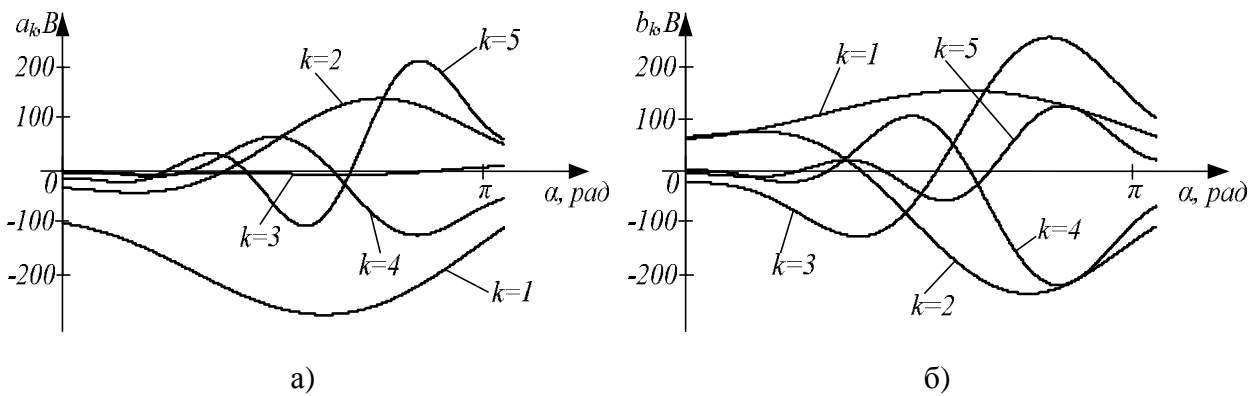


Рисунок 10 – Зависимости косинусной a_k (а) и синусной b_k (б) составляющих от угла α для симметрии первого рода (рис. 7)

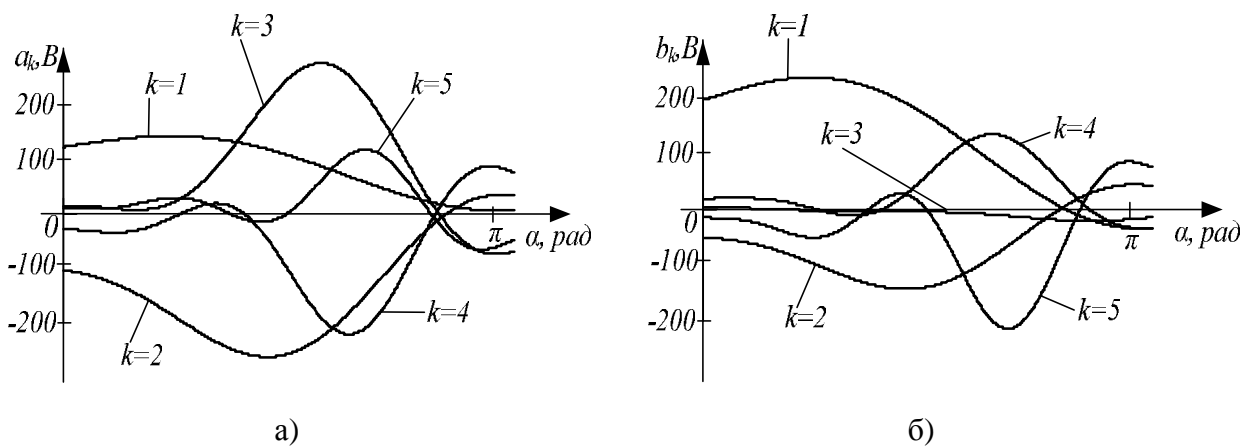


Рисунок 11 – Зависимости косинусной a_k (а) и синусной b_k (б) составляющих от угла α для симметрии второго рода (рис. 8)

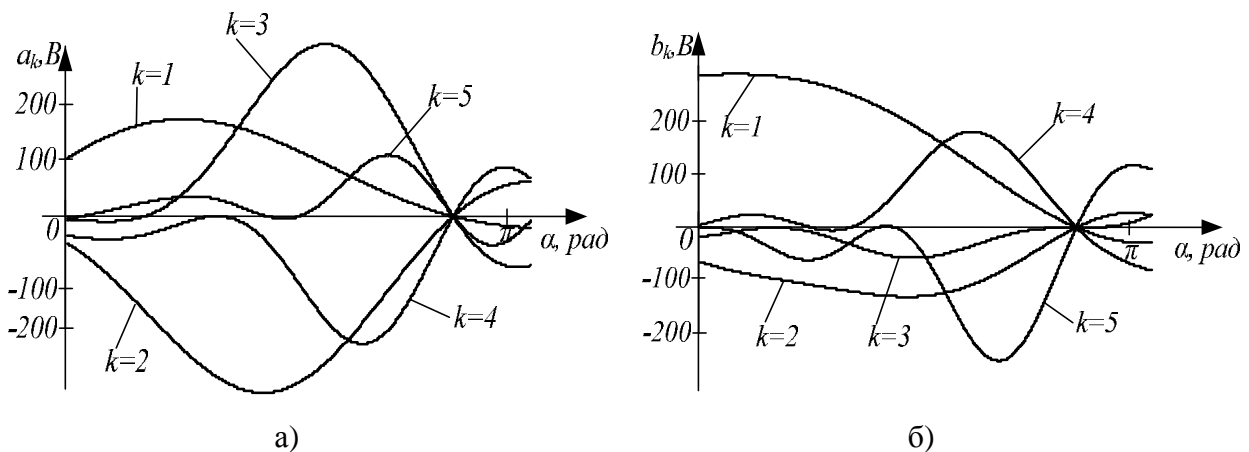


Рисунок 12 – Зависимости косинусной a_k (а) и синусной b_k (б) составляющих от угла α для симметрии третьего рода со сдвигом (рис. 9)

Исходя из представленных выше зависимостей, можно сделать вывод, что, изменяя угол α , можно получить различный гармонический состав. Также необходимо отметить, что в зависимости от выбранной осевой симметрии части периодического сигнала при

гармонической аппроксимации на периоде T' можно получить различные тригонометрические зависимости.

ВЫВОДЫ. Разработан математический аппарат для получения различных видов псевдополигармонических сигналов напряжения и тока на произвольном периоде повторения.

Необходимый гармонический состав напряжения и тока для задач идентификации ЭМП АД с помощью энергетического метода получают путем разложения в ряд Фурье указанных сигналов на произвольном промежутке.

Стоит отметить, что использование периодических сигналов, обладающих осевыми симметриями второго и третьего родов, является более целесообразным при разложении в ряд Фурье, т.к. в этом случае постоянная составляющая a_0 будет равна нулю.

Использование псевдополигармонических сигналов, полученных путем разложения в ряд Фурье периодического сигнала, обладающего одной или несколькими видами симметрий, при идентификации ЭМП АД с помощью энергетического метода позволяет избавиться от необходимости применения источников полигармонического напряжения, в качестве которых могут выступать преобразователи частоты или тиристорные регуляторы напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по электрическим машинам: В 2 т. / Под общей ред. И.П. Копылова. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – Т. 1. – 456 с.
2. Filipetti F., Francescini G., Tassoni C. Recent developments of induction motor drives fault diagnoses using AI techniques // IEEE Transactions in Industrial electronics. – USA, 2000. – Iss. 47. – PP. 994–1004.
3. Кучерук В.Ю. Элементи теорії побудови систем технічного діагностування електромоторів. Монографія. – Вінниця: Універсум–Вінниця, 2003. – 195 с.
4. Гольдберг О.Д. Испытания электрических машин: учеб. [для вузов]. – М.: Высшая школа, 2000. – 255 с.
5. Метод расчета схем замещения и пусковых характеристик глубокопазных асинхронных двигателей / В.Ф. Сивокобыленко, В.А. Павлюков, Х. Хенниуй // Электротехника. – 1996. – № 3. – С. 38–41.
6. Ромашихин Ю.В., Родькин Д.И. Методы определения параметров машин переменного тока // Вісник КДПУ. – Кременчук: КДПУ ім. М. Остроградського, 2010. – Вип. 4/2010 (63), част. 3. – С. 140–143.
7. Родькин Д.И. Особенности применения энергетического метода идентификации двигателей переменного тока при псевдополигармонических сигналах // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. – Кременчук: КДПУ ім. М. Остроградського, 2009. – Вип. 1 (5). – С. 7–20.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2003. – 608 с.
9. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
10. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1988. – 536 с.
11. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. – М.: Советское радио, 1979. – 280 с.
12. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.

13. Percival Donald B., Andrew T. Walden. Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques. – Cambridge University Press, 1993. – PP. 190–195.
14. Mark G. Karpovsky, Radomir S. Stankovi'c, Jaakko T. Astola. Spectral Logic and Its Applications for the Design of Digital Devices. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008. – 598 p.
15. Radomir S. Stankovi'c, Claudio Moraga, Jaakko T. Astola. Fourier Analysis on Finite Groups with Applications in Signal Processing and System Design. Interscience Publishers, New York, 2005. – 230 p.
16. Купер Дж., Макгиллем А. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989. – 376 с.
17. Patrick F. Dunn. Measurement and Data Analysis for Engineering and Science, New York: McGraw–Hill, 2005. – 540 p.
18. Boashash B. Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference // Elsevier Science. – Oxford, 2003. – PP. 643–650.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1969. – 656 с.
20. Спектральный анализ мгновенной мощности в сети с полигармоническим напряжением и током / Калинов А.П., Лейко В.В., Родькин Д.И. // Вісник КДПУ. – Кременчук: КДПУ, 2006. – № 3/2006 (38), част. 2. – С. 59–72.
21. Сироткин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
22. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. – 640 с.
23. Родькин Д.И., Калинов А.П., Ромашихин Ю.В. Развитие частотных методов оценки параметров двигателей переменного тока // Вісник КДПУ. – Кременчук: КДПУ, 2005. – № 3/2005 (33), част. 2. – С. 43–47.
24. Родькин Д.И. Использование псевдополигармонических сигналов в задачах идентификации параметров двигателей переменного тока // Тематический выпуск «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика» научно-технического журнала «ЭЛЕКТРОИНФОРМ». – Львов: ЭКОинформ, 2009. – С. 29–39.

THE DEFINITION POLYHARMONIC SIGNALS IN HARMONIC ANALYSIS

N. Rudenko, Yu. Romashykhin

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

ul. Pervomayskaya, 20, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: nikita_rudenko@mail.ru

The features of the formation of the axial symmetry of the harmonic signal for a periodic signal and its further expansion in a Fourier series. Shows the versatility of the harmonic approximation to determine the cosine and sine components, as well as the values of the constant component of the periodic signal of any kind. To show that any part of any periodic signal can be represented as the sum of harmonic oscillations with frequencies that are multiples of the fundamental frequency of vibration.

Key words: fourier series, periodic signal, harmonic signal, harmonic approximation, axial symmetry.

REFERENCES

1. *Handbook of electric machines*: in 2 volumes / Ed. I.P. Kopylov. – Moscow: Energoatomizdat, 1988. – Iss. 1. – 456 p. [in Russian]

2. Filipetti F., Francescini G., Tassoni C. Recent developments of induction motor drives fault diagnoses using AI techniques // *IEEE Transactions in Industrial electronics*. – USA, 2000. – Iss. 47. – PP. 994–1004.
3. Kucheruk V.Y. *Elements of the theory of building systems technical diagnostics of electric motor: Monograph*. – Vinnitsa: Universum–Vinnitsa, 2003. – 195 p. [in Ukrainian]
4. Goldberg O.D. *Testing of electrical machines: Studies. [for universities]*. – Moscow: Visshaya shkola, 2000. – 255 p. [in Russian]
5. Method of calculating the equivalent circuit and starting characteristics glubokopaznyh asynchronous motors / V.F. Sivokobylenko, V.A. Pavlyukov, H. Henniui // *Electrical Engineering*. – 1996. – № 3. – PP. 38–41. [in Russian]
6. Romashihin Yu.V., Rodkin D.I. Methods for determining the parameters of AC machines // *Transaction KSPU*. – Kremenchug: KSPU, 2010. – Iss. 4/2010 (63), part 3. – PP. 140–143. [in Russian]
7. Rodkin D.I. Particularities of the using the energy method to identifications of induction motors at psevdopoligarmonical signal // *Electromechanical and energysaving systems*. – Kremenchuk: KDPU, 2009. – Iss. 1/2009 (5). – PP. 7–20. [in Russian]
8. Sergienko A.B. *Digital signal processing: Textbook for universities*. – SPb.: Piter, 2003. – 608 p. [in Russian]
9. Dadzhion D., Mercero R. *Digital processing of multidimensional signals*. – Moscow: Mir, 1988. – 488 p. [in Russian]
10. Baskakov S.I. *Radio Circuits and Signals: A Textbook for university*. – Moscow: Visshaya shkola, 1988. – 536 p. [in Russian]
11. Ignatov V.A. *Information theory and signal transfer*. – M.: Sovetskoye Radio, 1979. – 280 p. [in Russian]
12. Oppenheim A.V., Schafer R.W. *Digital signal processing*. – M.: Svyaz, 1979. – 416 p. [in Russian]
13. Percival, Donald B.; Andrew T. Walden. *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*. Cambridge University Press, 1993. – PP. 190–195.
14. Mark G. Karpovsky, Radomir S. Stankovi'c, Jaakko T. Astola. *Spectral Logic and Its Applications for the Design of Digital Devices*. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008. – 598 p.
15. Radomir S. Stankovi'c, Claudio Moraga, Jaakko T. Astola. *Fourier Analysis on Finite Groups with Applications in Signal Processing and System Design // Interscience Publishers*. – New York, 2005. – 230 p.
16. Cooper J., McGillem A. *Probabilistic methods of signals and systems analysis*. – Moscow: Mir, 1989. – 376 p. [in Russian]
17. Patrick F. Dunn *Measurement and Data Analysis for Engineering and Science*. – New York: McGraw–Hill, 2005. – 540 p.
18. B. Boashash. *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference // Elsevier Science*. – Oxford, 2003. – PP. 643–650.
19. Fihtengolc G. *Course differential and integral calculus*. – Moscow: Nauka, 1969. – Iss. 3. – 656 p. [in Russian]
20. Kalinov A.P., Layko V.V., Rodkin D.I. Spectral analysis of instantaneous power in the network with polyharmonic voltage and current // *Bulletin KSPU*. – Kremenchuk: Kremenchuk State Polytechnic University, 2006. – № 3/2006 (38), part 2. – PP. 59–72. [in Russian]
21. Sirotkin Y.I., Shaskolskaya M.P. *Fundamentals of crystal physics*. – Moscow: Nauka, 1979. – 640 p. [in Russian]

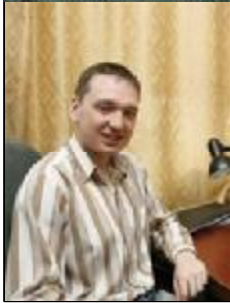
22. Prasolov V.V. *Task of planimetry*. – Moscow: MCNMO: JSC "Moskovskiye uchebniky", 2006. – 640 p. [in Russian]

23. Rodkin D.I., Kalinov A.P., Romashihin Yu.V. Development frequency methods parameter estimates of AC motors // *Transaction KSPU*. – Kremenchuk: KSPU, 2005. – № 3/2005 (33), part 2. – PP. 43–47. [in Russian]

24. Rodkin D.I. Use of psevdopolyharmonic signals in the problems of parameter identification of AC motors // *Special issue "Problems of automated electric. Theory and practice" of research journal "ELEKTROINFORM"*. – Lviv: EKOinform, 2009. – PP. 29–39. [in Russian]



Руденко Никита Андреевич,
аспирант кафедри САУЭ
КрНУ,
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг,
39600, Украина,
тел. 05366-31147,
E-mail: nikita_rudenko@mail.ru



Ромашихин Юрий Владимирович,
к.т.н., ассистент кафедри САУЭ,
КрНУ,
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг,
39600, Украина,
тел. 05366-31147,
E-mail: Romashihin_yuriy@mail.ru

Стаття надійшла 09.01.2013
Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Толочко О.І.