CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

DOI https://doi.org/10.32782/2307-9770.2026.14.02.04
UDC 37.015.3:517.9:519.876.5

Mathematical modeling of the learning process based on predator-prey interactions

Chornyi, O., Herasymenko, L.*

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Kremenchuk, Ukraine

Received*:** *24.03.26* ***Accepted*:** *19.05.26* ***Published: *31.05.26*

Abstract. The purpose of the article is to substantiate the possibility of applying modified predator–prey interaction models to the formal description of the learning process of a higher education student as a controlled dynamic system, considering the influence of external disturbances and internal psychophysiological states. The study employs methods of mathematical and simulation modeling. A hybrid model is proposed that integrates a second-order cybernetic learning model with a modified Lotka–Volterra framework. Two main state variables are introduced: the normalized level of knowledge acquisition and an integral indicator of disturbance intensity, which generalizes fatigue, cognitive overload, attentional instability, anxiety, and environmental influences. The model is extended by saturation mechanisms, background disturbances, controllable parameters, and inertia, which ensures its physical interpretability and stability. Numerical experiments are conducted using a state-space representation based on systems of differential equations. The simulation results reveal a three-stage structure of the learning process: an initial adaptation phase, a quasi-stationary regime, and a transition to a new steady state following improvements in learning conditions. It is shown that reducing disturbance intensity and increasing teaching effectiveness lead to a higher average level of knowledge acquisition and a decrease in the amplitude of fluctuations associated with fatigue and recovery. The phase trajectory in the "knowledge acquisition – disturbance intensity" space is proposed as an informative indicator of the quality of the learning environment and the effectiveness of pedagogical interventions. The scientific originality of the study lies in the integration of a second-order cybernetic learning model with a modified predator–prey interaction model to describe learning dynamics, where disturbances are represented as a separate dynamic loop with clear pedagogical interpretation, which has not been previously considered in such a form. The proposed model can be used to analyze and optimize the educational process, identify critical factors that reduce learning efficiency, and support the development of adaptive and personalized learning systems in higher education institutions.
Key words: educational process of a higher education institution, second-order cybernetic model, Lotka–Volterra model, external and internal factors influencing the educational process, learning dynamics.

Математичне моделювання процесу навчання на основі взаємодії типу «хижак–жертва»

Чорний О. П., Герасименко Л. В.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна

Анотація. Метою статті є обґрунтування можливості застосування модифікованих моделей взаємодії типу «хижак–жертва» для формалізованого опису процесу навчання здобувача вищої освіти як керованої динамічної системи з урахуванням впливу зовнішніх завад та внутрішніх психофізіологічних станів. У дослідженні використано методи математичного та імітаційного моделювання. Запропоновано гібридну модель, що поєднує кібернетичну модель навчання другого порядку з модифікованою моделлю Лотки–Вольтерри. Уведено дві основні змінні стану: нормований рівень засвоєння знань і інтегральний показник інтенсивності завад, який узагальнює втому, когнітивне перевантаження, нестійкість уваги, тривожність і вплив зовнішніх чинників. Модель доповнено механізмами насичення, фонових завад, керованих параметрів та інерційності, що забезпечує її фізичну коректність і стійкість. Чисельні експерименти проведено з використанням диференціальних рівнянь у просторі станів. Результати моделювання демонструють триетапну структуру навчального процесу: фазу початкової адаптації, квазістаціонарний режим та перехід до нового усталеного стану після покращення умов навчання. Показано, що зменшення інтенсивності завад і підвищення ефективності викладання призводять до зростання середнього рівня засвоєння знань та зниження амплітуди коливань, пов'язаних із перевтомою і відновленням. Фазова траєкторія в просторі «рівень засвоєння –

*

Corresponding Author:
Herasymenko, Larysa. E-mail: gerasimenko24@gmail.com

Відповідальний автор:
Герасименко, Лариса Віталіївна. E-mail: gerasimenko24@gmail.com

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

інтенсивність завад» запропонована як інформативний індикатор якості освітнього середовища та педагогічних впливів. Наукова новизна роботи полягає в інтеграції кібернетичної моделі другого порядку з модифікованою моделлю «хижак–жертва» для опису навчальної динаміки з урахуванням завад як окремого динамічного контуру, що раніше не розглядалося у такій інтерпретованій формі. Запропонована модель може бути використана для аналізу та оптимізації освітнього процесу, ідентифікації критичних чинників зниження ефективності навчання, а також для розроблення адаптивних і персоналізованих систем навчання у закладах вищої освіти.
Ключові слова: освітній процес закладу вищої освіти, кібернетична модель другого порядку, модель Лотки–Вольтерри, зовнішні і внутрішні чинники впливу на освітній процес, динаміка навчання.

I Вступ

У сучасних умовах невизначеності і нестабільності, викликаних війною в Україні, гостро постає питання якості навчання здобувачів вищої освіти, здатних активно долучитися до виконання своїх професійних обов'язків, не витрачаючи часу на переучування, перекваліфікацію чи тривалу адаптацію до роботи.

Процес навчання здобувачів вищої освіти можна розглядати як динамічну систему, у якій поступово змінюється рівень засвоєної інформації, сформованість умінь, навичок, загальних і фахових компетентностей, що забезпечує свідому і стабільну здатність їх відтворення в практичній діяльності. На цей процес одночасно впливають керовані чинники, до яких належать планомірність і якість викладання; зміст навчального матеріалу, його обсяг, рівень складності; організація освітнього процесу: чергування лекційних і практично-лабораторних занять, повторення засвоєного, розв'язування практичних вправ і завдань, які дозволять використати здобуті знання на практиці. Крім цього не можемо не враховувати некеровані або частково керовані чинники, зумовлені зовнішніми завадами й внутрішнім станом здобувача вищої освіти.

Класичні кібернетичні моделі навчання часто подають динаміку засвоєння у вигляді диференційних рівнянь першого або другого порядку, які відображають інерційність, опір (демпфування), здатність до умовиводу і забування того, хто навчається. Проте для адекватного відтворення реальних коливань продуктивності та ефектів «плато», «перевтоми» і відновлення бажано ввести додаткові динамічні змінні, які описують стан впливу завад. Саме це забезпечує модель взаємодії типу «хижак–жертва», де знання (інформація, що засвоюється) інтерпретуються як ресурс, а завади та внутрішня втома як чинник, що його «споживає» або пригнічує.

Мета роботи. Обґрунтувати можливість застосування моделей типу «хижак–жертва» для опису процесу навчання здобувачів вищої освіти.

Для досягнення поставленої мети було розв'язано наступні завдання:

– проаналізувати недоліки класичних кібернетичних моделей навчання (зокрема, моделей другого порядку), які не враховують динаміку внутрішніх і зовнішніх завад, таких як когнітивне перевантаження, втома, тривожність, увагові коливання тощо та не відтворюють реалістичних ефектів навчального процесу – плато, хвилеподібності, накопичення втоми та відновлення;

– модифікувати класичну модель «хижак–жертва» шляхом введення механізмів насичення, фонової інтенсивності завад, нелінійної взаємодії між змінними та керованих параметрів, що забезпечує фізичну інтерпретованість, обмеженість станів і стійкість моделі в межах реалістичних значень;

– синтезувати гібридну динамічну модель навчального процесу, яка поєднує: кібернетичну модель другого порядку (для опису інерції, опору, умовиводу, забування), модифіковану систему рівнянь типу «хижак–жертва» (для опису динаміки завад і їхнього впливу на засвоєння знань);

– виконати чисельне моделювання отриманої системи диференціальних рівнянь для дослідження часових траєкторій змінних стану (засвоєння та завад) і виявлення характерних етапів навчального процесу.

II Матеріал і методи дослідження

У роботі запропоновано гібридну динамічну модель навчального процесу, що поєднує кібернетичну модель другого порядку (для опису інерційності, опору, умовиводу та забування) із модифікованою системою рівнянь типу Лотки–Вольтерри для моделювання взаємодії між рівнем засвоєння знань та інтенсивністю завад.

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

Як основні змінні стану використано: нормований рівень засвоєння знань x(t)∈[0,1]; інтенсивність завад і внутрішніх станів y(t) (втома, тривожність, когнітивне навантаження тощо); Навчальний стимул u(t) – керована зовнішня дія (організація навчального процесу).

Модель доповнено механізмами насичення фоновими завадами та параметрами, що підлягають педагогічному керуванню. Дослідження ґрунтується на методах математичного моделювання нелінійних динамічних систем, аналізі фазових траєкторій та чисельному розв'язанні системи звичайних диференціальних рівнянь. Математичне моделювання дозволяє створити схему майбутнього освітнього процесу для його ефективної організації і дозволяє передбачити вплив зовнішніх завад на засвоєння змісту навчання, визначити можливість оптимального розподілу навчального навантаження, врахувати періоди падіння мотивації тощо.

III Результати

Для забезпечення інтерпретованості та фізичної коректності моделі введемо дві основні змінні стану.

1. Нормований рівень засвоєння

$$x(t) \in [0,1],$$

де $x = 0$ відповідає відсутності засвоєння, а $x = 1$ відповідає максимально можливому рівню засвоєння певного обсягу матеріалу у межах навчального періоду за ідеальних умов. Нормування є необхідним, оскільки воно одразу обмежує виникнення нереальних значень та спрощує порівняння різних студентів і навчальних сценаріїв.

2. Інтенсивність завад і внутрішнього напруження

$$y(t) \geq 0,$$

де y – зовнішні завади та внутрішні стани, які знижують ефективність навчання або прискорюють забування. У межах цієї роботи y розглядатимемо як узагальнену змінну, що може включати втому, нестійкість уваги, тривожність, розумове перевантаження, а також несприятливі умови середовища.

Додатково введемо вплив керування, який відображає організацію освітнього процесу.

3. Навчальний стимул

$$u(t) \geq 0,$$

який описує інтенсивність навчальної діяльності з урахуванням пояснень викладача, практичної роботи, повторення, індивідуальних завдань. У загальному випадку $u(t)$ є керованою величиною, що може змінюватися у часі залежно від навчального плану, методики викладання або режиму занять.

Для подальшого аналізу сформулюємо такі припущення:

–засвоєння має характер, наближений до експоненційного, тобто при наближенні x до 1 швидкість приросту зменшується;

–завади не зникають повністю, а мають фонову складову, яка підтримується зовнішнім середовищем і внутрішніми ритмами;

–втома накопичується під час активного навчання та зменшується під час відновлення;

–покращення умов навчання та викладання моделюється як зміна параметрів і або функцій $u(t), u_0(t)$ у момент часу t_0 або як плавна зміна у часі.

У [3, 12-14] процес навчання описують на основі кібернетичної моделі – диференційного рівняння другого порядку, що дозволяє відобразити інерційність та опір навчанню.

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t) - b_fx(t),$$

де $a_1 > 0$ відображає опір навчанню та демпфування, тобто зниження швидкості реакції системи на стимул; $a_0 > 0$ відображає інерційність і «жорсткість» системи, що визначає власні часові масштаби; $b_0 > 0$ відображає здатність до умовиводу та трансформації навчального стимулу $u(t)$ у приріст знань; $b_f \geq 0$ є коефіцієнтом забування, який відображає зниження рівня засвоєння.

За потреби, рівняння доповнюють нелінійністю насичення кривої навчання, щоб забезпечити межу $x \leq 1$. Наприклад, замість лінійного члена a_0x або b_0u вводять функції:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = b_0u(t)(1 - x) - b_fx.$$

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

Це забезпечує зменшення приросту при наближенні до $x = 1$ без порушення кібернетичної інтерпретації параметрів.

Для подальшої взаємодії з моделлю типу «хижак–жертва» перейдемо до подання у просторі станів. Уведемо швидкість засвоєння

$$v(t) = \dot{x}(t),$$

тоді система другого порядку перетворюється на двовимірну систему

$$\dot{x} = v,$$
$$\dot{v} = -a_1 v - a_0 x + b_0 u(t)(1 - x) - b_f x.$$

Ця модель описує інерційність навчального процесу та базові втрати, але не містить явного динамічного контуру завад. Для його опису розглянемо модель Лотки-Вольтерри.

Класична модель Лотки–Вольтерри має вигляд

$$\dot{x} = ax - \beta xy,$$
$$\dot{y} = \delta xy - \gamma y,$$

де x є «жертвою», а y є «хижаком». Пряма інтерпретація в контексті навчання може бути сформульована так: швидкість накопичення знань зростає α, але вона пригнічується завадами βxy; які зростають в умовах активної навчальної діяльності δxy і спадають за умови відновлення працездатності γy.

Однак видно, що класична система Лотки–Вольтерри має суттєві обмеження для опису навчального процесу: у моделі немає насичення, тому x не має верхньої межі; розв'язок рівнянь дає незатухаючі коливання, тоді як у навчанні частіше спостерігають затухання або слабко виражені коливання; відсутня фонова складова завад, тоді як реальні завади існують навіть при малому x.

Тому модифікуємо рівняння «хижак–жертва», які збережуть взаємодію, але будуть містити насичення, фонові складові та керований вплив $u(t)$.

Коригування моделі проведемо шляхом введення рівняння для $x(t)$ з насиченням та втратами, а також окремого рівняння для $y(t)$ з накопиченням і відновленням.

Рівняння засвоєння запишемо у вигляді

$$\dot{x} = \alpha u(t)(1 - x) - \beta xy - \lambda x,$$

де $\alpha u(t)(1 - x)$ – є складовою навчання; параметр α відображає здібність до умовиводу і перетворення навчальної інформації на знання; множник $(1 - x)$ реалізує насичення; $-\beta xy$ описує інтерференцію, де β є показником чутливості до завад; $-\lambda x$ є забуванням навіть при незначних завадах, λ – коефіцієнт забування.

Ця формула гарантує, що $x(t)$ не перевищує 1 при $u(t) \geq 0$ і $y(t) \geq 0$, оскільки при $x \to 1$ корисний приріст майже зникає, а втрати залишаються.

Рівняння для завад запишемо у вигляді

$$\dot{y} = u_0(t) + du(t) + qx - \gamma y,$$

де $u_0(t)$ є фоновою складовою завад, яка може включати постійні або випадкові перешкоди. У найпростішому випадку візьмемо

$$u_0(t) = \bar{u}_0\big(1 + \varepsilon sin(\omega t)\big),$$

що відображає, наприклад, добові коливання уваги та працездатності; $du(t)$ – відображає накопичення втоми від активного навчання; qx можна розглядати як розумове навантаження від накопиченого обсягу знань або складності змісту навчальної інформації; $-\gamma y$ – відображає відновлення і релаксацію, де γ є показником швидкості відновлення.

Важливо, що ця модель відтворює такий факт, що навіть за покращення умов $y(t)$ не обов'язково стає нульовим через наявність $u_0(t)$.

При моделюванні процесу навчання доцільно обмежити дію завад на засвоєння навчальної інформації, оскільки у реальних умовах вплив завад теж має насичення. Це враховується через нелінійну функцію взаємодії.

$$\dot{x} = \alpha u(t)(1 - x) - \frac{\beta x}{1 + hx} y - \lambda x,$$
$$\dot{y} = u_0(t) + du(t) + \eta \frac{\beta x}{1 + hx} y - \gamma y,$$

де $h > 0$ – параметр насичення. При малих x, функція має приблизно лінійний характер, а при великих

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

x ефективна швидкість впливу завад обмежується. Це підвищує стійкість моделі та краще узгоджується з фактом, що при високій сформованості знань навіть під дією завад рівень не миттєво не зменшується; параметр η відображає, наскільки взаємодія «знання–завади» породжує додаткову втому або напруження, що може призводити до певних коливань або «хвиль».

Для узгодження з кібернетичною моделлю другого порядку доцільно побудувати гібридну модель, у якій $x(t)$ має інерцію і опір, а $y(t)$ описує динаміку завад.

Рівняння моделі другого порядку з урахуванням впливу завад запишемо у вигляді:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b_0 u(t)(1-x) - b_f x - b_y yx,$$

де a_1 – відповідає опору навчальному процесу; a_0 – відповідає інерції до навчального процесу; b_0 – відповідає умовиводу; b_f – відповідає забуванню; b_y – відповідає чутливості до завад, причому взаємодія береться у вигляді $y\,x$, що відображає більший вплив завад, коли засвоєний матеріал має бути системно запам'ятований і, за необхідності, відтворений.

Динаміку зміни завад запишемо у вигляді рівняння другого порядку

$$\dot{y} = u_0(t) + du(t) + qx - \gamma y.$$

У просторі станів модель має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -a_1 v - a_0 x + b_0 u(t)(1-x) - b_f x - b_y yx, \\ \dot{y} &= u_0(t) + du(t) + qx - \gamma y. \end{aligned}$$

Цю модель використаємо для подальших розрахунків. Вона дозволяє ототожнити задані параметри інерції, опору, умовиводу і забування з відповідними складовими, а завадовий контур $y(t)$ вводиться додатково як фізично інтерпретована змінна.

Отримана модель потребує введення певних заходів для покращення навчального процесу з урахуванням дії завад. Покращення навчального процесу може бути описано як керована зміна параметрів або входів. Будемо розрізняти дві групи впливів:

1. Дії, спрямовані на зменшення завад. До цієї групи належать організаційні заходи, які зменшують негативні впливи в організації освітнього процесу: переривання занять, стрес, а також підвищують здатність до ресурсного відновлення. У моделі це реалізується через зменшення фону завад $u_0(t)$, підвищення швидкості відновлення γ, зменшення чутливості до завад β. Важливо, що такі дії найчастіше зменшують амплітуду коливань і підвищують середній рівень $x(t)$, але не гарантують повного зникнення коливань, оскільки $u_0(t)$ може містити постійні зовнішні перешкоди та накопичення втоми;

2. Дії, спрямовані на покращення викладання. Покращення викладання охоплює структурованість змісту навчальної інформації, якість пояснення, адекватність темпу викладання, добір влучних прикладів, індивідуалізацію освітньої діяльності, що впливає на зменшення розумового перевантаження. У моделі це відображається через зростання ефективності умовиводу α або b_0, зменшення зусиль на навчання, попередження виникнення втоми d, зменшення опору навчальному процесу a_1, оптимізацію часових характеристик a_0 та ω – вибираються так, щоб уникати перерегулювання.

У контексті кібернетичної моделі другого порядку покращення викладання часто дає ефект «підвищення підсилення» навчального процесу та зменшення демпфування без втрати стійкості.

У розроблений моделі таке покращення реалізується в певний момент t_0 в якості кусочно-неперервної функції для параметрів

$$p(t) = \begin{cases} p_1, t < t_0, \\ p_2, t \geq t_0, \end{cases}$$

де p може бути будь-яким параметром з множини $\{\alpha, \beta, \lambda, \gamma, d, b_0, a_1, a_0, b_y\}$ або функцією $u_0(t)$. Такий підхід забезпечує формалізацію «перехідного процесу» та дозволяє аналізувати досягнення нового усталеного режиму.

Проаналізуємо можливу поведінку моделі. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha u(1-x) - \beta xy - \lambda x, \\ \dot{y} &= u_0 + du + qx - \gamma y, \end{aligned}$$

де для простоти u, u_0 сталі. Рівновага (x^*, y^*) визначається з умов $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$. З другого рівняння:

$$y^* = \frac{u_0 + du + qx^*}{\gamma}.$$

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

Підстановка в перше рівняння дає нелінійне рівняння відносно x^*. У загальному випадку воно має єдиний розв'язок у межах $[0,1]$ за типових параметрів. Це означає, що система прагне до стаціонарного режиму, а коливання, якщо вони з'являються, зазвичай, є або затухаючими, або вимушеними через періодичність $u_0(t)$. З точки зору навчання як процесу, коливання можуть бути обумовлені наступними причинами: вимушені коливання, якщо $u_0(t)$ або $u(t)$ мають періодичні компоненти, що відповідає реальним ритмам працездатності; автоколивання, якщо у системі існує сильний нелінійний зворотний зв'язок між накопиченням знань, зростанням втоми та уповільненням засвоєння навчальної інформації.

За отриманою моделлю виконаємо моделювання процесу навчання з урахуванням дії завад, а також зменшення завад шляхом керування процесом навчання. На рис. 1 показаний графік $x(t)$ динаміки засвоєння інформації.

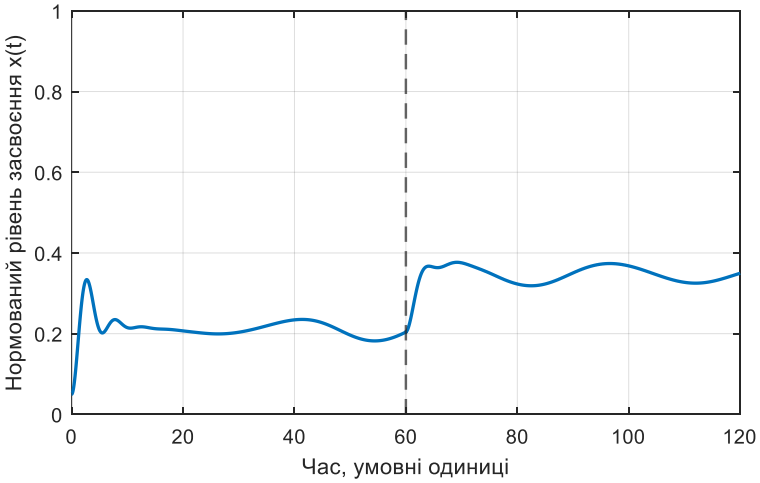

Рис. 1. Динаміка засвоєння інформації студентом

Змінна $x(t)$ пояснюється як нормований рівень засвоєної інформації (знань, умінь) на інтервалі $[0; 1]$. Зміна у часі відображає не лише «скільки здобувач знає», а й як знання формується: із перехідними процесами, хвилеподібністю, затримками реакції на зміни умов. Особливістю моделі є те, що враховується інерційність і «темп засвоєння». Це відповідає тому, що здобувач починає навчатись не миттєво (є фаза стабілізації уваги й готовності), результати навчання не змінюються одразу після організаційних змін, а з певним запізненням, можливі короткі переналаштування (перевантаження або різке піднесення інтересу), які потім згасають.

На рис. 2 показаний графік змін у часі $y(t)$ як індикатора завад і втоми. Змінна $y(t)$ інтерпретується як інтегральний показник інтенсивності завад, який поєднує зовнішні чинники (дискомфортні умови праці: переривання навчання, дефіцит часу, незрозумілі інструкції, відволікання) та внутрішній стан (втома, зниження концентрації, емоційне напруження, когнітивне перевантаження). Часова динаміка показує, наскільки здобувач змушений витрачати ресурси на «не навчальну» роботу: боротьбу з відволіканнями, відновленням уваги, компенсацією складності навчального матеріалу й напруги щодо її засвоєння.

Проведемо аналіз отриманих результатів. Весь часовий інтервал розділимо на три етапи.

Етап I.

Початок навчання і первинна адаптація. На обох графіках на початку спостерігається різка зміна стану: $x(t)$ швидко зростає, а $y(t)$ також змінюється у відповідь на початок навчальної діяльності. Студент на початку навчальної діяльності мобілізує ресурси уваги, робочої пам'яті, мотивації. Це дає швидкий приріст знань, але навіть за нормальних умов будь-яка інтенсивна розумова робота викликає збільшення навантаження: зростає $y(t)$, оскільки з'являється втома та напруга від необхідності підтримувати концентрацію. Може з'явитись короткочасне "перерегулювання" $x(t)$. Здобувач може спочатку демонструвати швидкий прогрес (часто за рахунок мотивації, інтересу до проблеми, репродуктивних задач на початковому етапі), а далі темп нормалізується.

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

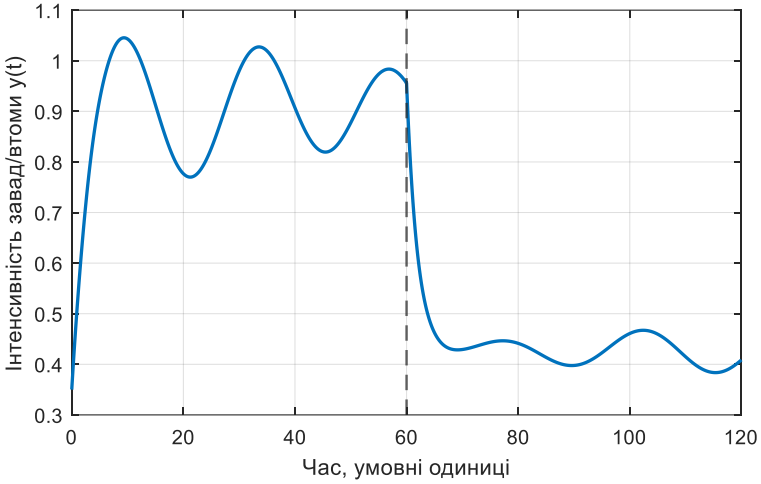

Рис. 2. Динаміка зміни у часі завад і втоми

Етап II.

Усталене навчання до покращення умов (інтервал до t_0). У середній частині видно, що $x(t)$ коливається навколо певного середнього рівня (квазістаціонарний режим), $y(t)$ має відносно високий рівень і помітні коливання – це цикли втоми/відволікань, чергування розумового підйому й втоми, перехід від простих до складніших фрагментів змісту навчальної інформації, вплив зовнішніх чинників.

Етап III.

Перехід після t_0 на новий рівень (після покращення умов). У момент t_0 на графіках видно, що $y(t)$ помітно зменшується і стає менш коливальним, $x(t)$ виходить на вищий середній рівень, зберігаючи природну хвилеподібність. Зниження $y(t)$ означає: здобувач витрачає менше психофізіологічного ресурсу на подолання перешкод і відновлення активної розумової роботи. Це дозоляє забезпечити більш ефективне засвоєння знань на тому ж часовому інтервалі. Після t_0 здобувач вищої освіти демонструє стабільніший стан: менша середня втома і вища середня продуктивність засвоєння.

На рис. 3 показана фазова траєкторія $y(t) - x(t)$ на площині «рівень засвоєння — інтенсивність завад/втоми» є компактним способом показати взаємозв'язок між результативністю навчання та станом студента без прив'язки до абсолютного часу. Кожна точка кривої відповідає одному моменту часу t: по осі x – скільки засвоєно, по осі y – наскільки сильні завади.

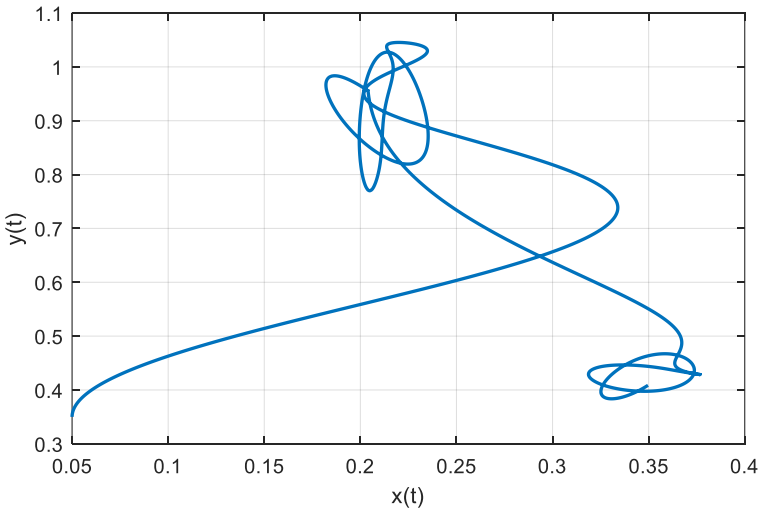

Рис. 3. Фазова траєкторія рівня засвоєння і інтенсивності завад

Фазова траєкторія дає кілька якісних показників. Вища петля (більші значення y) означає гірші умови або вищий рівень внутрішнього напруження, нижча петля – краще середовище або краща саморегуляція/відновлення. Ширша петля по осі x означає, що навіть за коливань стану здобувач здатен забезпечити помітний приріст засвоєння, вузька петля по x – навчання йде, але результат мало

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

додається, студент більше «переживає процес», ніж накопичує знання – це високі витрати при малому прирості. Таким чином, фазова крива показує, що результат навчання є наслідком не лише якості викладання, а балансу між ресурсами юнаків і дівчат (відновлення, саморегуляція), змістом і структурою навчального матеріалу, рівнем завад, що виникають у освітньому середовищі.

IV Обговорення

В українському науковому педагогічному дискурсі використання моделі Лотки-Вольтерри спочатку було пов'язано виключно з методикою навчання інформатики, математики, природничих дисциплін. Так, у праці С. Семірікова та І. Теплицького [1] зазначена модель розглядається в контексті математичної екології або кінетики, а задачі, сформульовані на її основі, як дидактичні прийоми розвитку творчих здібностей старшокласників. Автори наголошували, що робота з моделями в освітньому процесі урізноманітнює методи навчання та може бути використана у змісті багатьох навчальних дисциплін. Пізніше, у 2015 році колектив авторів [2] запропонував ідею використання даної моделі у спецкурсі «Об'єктно-орієнтоване моделювання» для здобувачів вищої освіти спеціальностей «Математика», «Інформатика» як приклад динамічних та імітаційних моделей математичної екології. Дані роботи розглядаємо як перший досвід використання моделі «хижак-жертва» у навчанні школярів та здобувачів вищої освіти у якості прикладу динамічної моделі.

Джерела [3]–[4] є найближчими до ідеї статті про формалізацію навчання як керованого процесу. Робота [3] описує й інтерпретує забування через криві (Ebbinghaus-логіка) та їх параметризацію в освітньому середовищі, що прямо корелює з моделями типу «хижак–жертва». Джерело [2] переводить цю логіку в площину адаптивних систем (тобто механізмів зворотного зв'язку та переналаштування траєкторії навчання). Праця [5] важлива як методологія дослідження й обґрунтовує застосування кібернетичних принципів (зокрема керування станом системи) для моделювання навчальних систем.

Дослідження [6] демонструє приклад організації навчальної діяльності у форматі проєктної/проблемної роботи, яка природно породжує вимірювані метрики (етапи, результати, складність завдань, критерії), що можуть бути використані в кібернетичній моделі як керуючі/збурювальні впливи.

Публікація [7] демонструє приклад інженерної імплементації: адаптивний алгоритм у мобільному додатку, де ключову роль відіграють крива забування і spaced repetition. Це практично підтверджує тезу статті, що «кібернетична модель» має сенс лише тоді, коли існує механізм керування – зміна інтервалів повторення, інтенсивності, складності матеріалу тощо.

У ширшому контексті ідея вдосконалення розкладу навчальних занять представлена у праці [8], де питання ставиться як оптимізаційна задача (що повторювати, коли, щоб максимізувати довготривале утримання). Дослідження [11] – наступний крок: персоналізація розкладу через методи підкріплення (reinforcement learning), що добре сумісно з «хижак–жертва/динаміка станів» як базовою моделлю, яку можна розширювати.

Джерела [9]–[10] важливі тим, що фіксують емпіричні залежності навчання/перенавчання на значних вибірках і порівнюють моделі, які здатні відтворювати спостережувані криві прогресу. Вони підсилюють наукову позицію статті: динамічна модель має бути такою, що пояснює масштабовані закономірності.

Особливо показовою є робота [12], де зроблена спроба автоматично виводити символічні закони/залежності формування навичок. Це дозволило обґрунтувати позицію, що параметри на кшталт «інтенсивність навчання», «забування», «взаємодія компонентів» можуть бути не лише постульовані, а й ідентифіковані з емпіричних даних. Джерело [17] розкриває доцільність використання змінних, пов'язаних із суб'єктивними станами учасникаів освітнього процесу (втома, перевантаження, коливання уваги), у моделях динаміки накопичення знань.

Якщо у даній статті модель «хижак–жертва» використовується як базова структура динаміки, то джерела [14]–[16] корисні як методичне підґрунтя для сучасного рівня моделювання: гібридні підходи (physics/process-informed), ідентифікація параметрів, робота з ODE-моделями та їх апроксимаціями. Окремо [15] показує розвиток лотка–вольтеррової логіки в нейромережевих динамічних конструкціях (RNN-структури), що може бути релевантним у виявленні перспектив подальших досліджнь (зокрема, перехід від класичних ОДУ до гібридних data-driven).

CC-BY © KrNU, EETECS, Chornyi, O., Herasymenko, L., 2026

V Висновки

У роботі запропоновано педагогічно інтерпретовану динамічну модель процесу навчання, де $x(t)$ описує нормований рівень засвоєння в межах $[0,1]$, а $y(t)$ об'єднує вплив зовнішніх завад і внутрішніх станів здобувачів. Показано, що кібернетична модель другого порядку адекватно відображає інерційність, опір, умовивід та забування, але вимагає введення окремого завадового контуру для відтворення хвилеподібності, ефектів перевтоми і відновлення здобувачів освіти у процесі навчання.

Обґрунтовано доцільність модифікації класичної моделі Лотки–Вольтерри для задачі навчання шляхом введення насичення, фонових завад і керованого впливу. На основі чисельного моделювання показано триетапний процес навчання: первинна адаптація, квазістаціонарний режим до покращення умов та перехід на новий рівень, що супроводжується зменшенням середнього рівня і амплітуди завад $y(t)$ та підвищенням середнього рівня засвоєння $x(t)$. Фазова траєкторія $y(t)$ підтверджує, що результативність навчання визначається балансом між накопиченням знань та ресурсними витратами на подолання завад і може використовуватись як індикатор якості умов навчання та ефективності методики викладання.

Запропонована математична модель слугує науково обґрунтованій організації, аналізу й оптимізації освітнього процесу у закладах вищої освіти. Вона дозволяє прогнозувати динаміку засвоєння навчального матеріалу здобувачами освіти з урахуванням впливу зовнішніх завад і внутрішніх психофізіологічних станів, зокрема втоми, тривожності, когнітивного перевантаження та коливань уваги. Це створює підґрунтя для раціонального розподілу навчального навантаження, визначення оптимального темпу подання матеріалу, чергування лекційних, практичних і самостійних видів роботи, планування повторення та відновлювальних пауз.

Результати статті можуть бути використані викладачами, адміністрацією ЗВО та розробниками освітніх програм для виявлення чинників, що знижують ефективність навчання, своєчасного коригування педагогічних впливів, зменшення перевантаження здобувачів і підвищення стабільності засвоєння знань. Особливу практичну цінність має фазова траєкторія «рівень засвоєння – інтенсивність завад», яка може слугувати індикатором якості освітнього середовища, ефективності методики викладання та доцільності організаційних змін.

Запропонований підхід може бути застосований для проєктування адаптивних і персоналізованих систем навчання, де освітній процес коригується відповідно до реального стану здобувача. Це сприятиме підвищенню якості професійної підготовки, зменшенню ризику перевтоми й формуванню більш гнучкого, ресурсозбережувального та результативного освітнього середовища.

Подальший розвиток роботи доцільно спрямувати на ідентифікацію параметрів за емпіричними даними, уточнення структури змінної $y(t)$ відповідно до особливостей зовнішніх і внутрішніх завад.

Бібліографічні посилання

1. Семеріков С.О., Теплицький І.О. Основи комп'ютерного моделювання у школі та педагогічному ВНЗ. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/704244/1/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F.pdf (дата звернення 19.05.2026).

2. Теплицький О. І., Теплицький І.О., Семеріков С.О., Соловйов В.М. Професійна підготовка учителів природничо-математичних дисциплін засобами комп'ютерного моделювання: соціально-конструктивістський підхід: монографія. Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі. Кривий Ріг: Видавничий відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2015. Том X. Випуск 1 (10): спецвипуск «Монографія в журналі». 278 с.

3. Plaskura P. Modelling of forgetting curves in educational e-environment. *Information Technologies and Learning Tools*. 2019. Vol. 71, No. 3. P. 1–11. DOI: 10.33407/itlt.v71i3.2368.

4. Demianenko V. M. The model for adaptive learning systems of open education information environment. *Information Technologies and Learning Tools*. 2020. Vol. 77, No. 3. P. 27–38. DOI: 10.33407/itlt.v77i3.3603.

5. Сікора Я. Б. Кібернетичний підхід до моделювання навчальних систем. Science, engineering and technology: global trends, problems and solutions: колективна монографія. Riga: Baltija Publishing, 2021. С. 54–57. DOI: 10.30525/978-9934-26-046-9-13.

6. Ozhyndovych L. M. Application of problem / project-oriented technology training for students of technical and IT specialties on the example of the course "Website Content Management System". *Journal of Information Technologies in Education* (ITE). 2019. No. 40. P. 80–94. DOI: 10.14308/ite000704.

7. Stasiv M.-A., Luchkevych M., Khudyi A. Adaptive learning algorithms in a mobile application for foreign language learning. *Information Systems and Networks*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 129–136. DOI: 10.23939/sisn2025.18.2.129.

8. Tabibian B., Upadhyay U., De A., Zarezade A., Schölkopf B., Gomez-Rodriguez M. Enhancing human learning via spaced repetition optimization. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2019. Vol. 116, No. 10. P. 3988–3993. DOI: 10.1073/pnas.1815156116.

9. Koedinger K. R., Carvalho P. F., Liu R., McLaughlin E. A. An astonishing regularity in student learning rate. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2023. Vol. 120, No. 13. e2221311120. DOI: 10.1073/pnas.2221311120.

10. Kumar A., Benjamin A. S., Heathcote A., Steyvers M. Comparing models of learning and relearning in large-scale cognitive training data sets. *npj Science of Learning*. 2022. Vol. 7, No. 1. Art. 24. DOI: 10.1038/s41539-022-00142-x.

11. Xiao Q., Wang J. DRL-SRS: Reinforcement Learning for Personalized Scheduling in Spaced Repetition Systems. *Applied Sciences*. 2024. Vol. 14, No. 13. Art. 5591. DOI: 10.3390/app14135591.

12. Liu S., Li Q., Shen X., Sun J., Yang Z. Automated discovery of symbolic laws governing skill acquisition from naturally occurring data. *Nature Computational Science*. 2024. Vol. 4, No. 5. P. 334–345. DOI: 10.1038/s43588-024-00629-0.

13. Lu M., Marghetis T., Yang V. C. A. first-principles mathematical model integrates the disparate timescales of human learning. *npj Complexity*. 2025. Vol. 2, No. 1. DOI: 10.1038/s44260-025-00039-x.

14. Koenig B. C., Spratt J. J., Sitzmann V., Bar-Sinai Y., Lippe P., Mohr A., Schaefer L., Pfaff T., Holl P. KAN-ODEs: Kolmogorov-Arnold Networks for learning ordinary differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024. Vol. 432. Art. 117397. DOI: 10.1016/j.cma.2024.117397.

15. Wu R., Zong Z., Yu J., Zhang S., Yi Z. Attractors coexistence and representation research of Lotka–Volterra recurrent neural networks by matrix analysis theory. Neurocomputing. 2024. Art. 128040. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.128040.

16. Wesselkamp M., Moser N., Kalweit M., Boedecker J., Dormann C. F. Process-Informed Neural Networks: A Hybrid Modelling Approach to Improve Predictive Performance and Inference of Neural Networks in Ecology and Beyond. *Ecology Letters*. 2024. Vol. 27, No. 11. e70012. DOI: 10.1111/ele.70012.

17. Wang H., Wu Q., Bao C., Ji W., Zhou G. Research on knowledge tracing based on learner fatigue state. *Complex & Intelligent Systems*. 2025. Vol. 11. DOI: 10.1007/s40747-025-01831-x.

References

1. Semerikov, S. O. & Teplytskyi, I. O. Osnovy kompiuternoho modeliuvannia u shkoli ta pedahohichnomu VNZ. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/704244/1/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F.pdf (accessed 19.05.2026).

2. Teplytskyi, O. I., Teplytskyi, I. O., Semerikov, S. O., Soloviov, V. M. (2015). Profesiina pidhotovka uchyteliv pryrodnycho-matematychnykh dystsyplin zasobamy kompiuternoho modeliuvannia: sotsialno-konstruktyvistskyi pidkhid: monohrafiia. Teoriia ta metodyka navchannia fundamentalnykh dystsyplin u vyshchii shkoli. Kryvyi Rih: Vydavnychyi viddil DVNZ «Kryvorizkyi natsionalnyi universytet», X, 1(10).

3. Plaskura, P. (2019). Modelling of forgetting curves in educational e-environment. Information Technologies and Learning Tools, 71(3), 1–11. https://doi.org/10.33407/itlt.v71i3.2368

4. Demianenko, V. M. (2020). The model for adaptive learning systems of open education information environment. Information Technologies and Learning Tools, 77(3), 27–38. https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3603

5. Sikora, Ya. B. (2021). Kibernetychnyi pidkhid do modeliuvannia navchalnykh system. Science, engineering and technology: global trends, problems and solutions: kolektyvna monohrafiia. Riga: Baltija Publishing, 54–57. DOI: 10.30525/978-9934-26-046-9-13.

6. Ozhyndovych, L. M. (2019). Application of problem / project-oriented technology training for students of technical and IT specialties on the example of the course “Website Content Management System”. Journal of Information Technologies in Education (ITE), 40, 80–94. https://doi.org/10.14308/ite000704

7. Stasiv, M.-A., Luchkevych, M. & Khudyi, A. (2025). Adaptive learning algorithms in a mobile application for foreign language learning. Information Systems and Networks, 18(2), 129–136. https://doi.org/10.23939/sisn2025.18.2.129

8. Tabibian, B., Upadhyay, U., De, A., Zarezade, A., Schölkopf, B. & Gomez-Rodriguez, M. (2019). Enhancing human learning via spaced repetition optimization. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 116(10), 3988–3993. https://doi.org/10.1073/pnas.1815156116

9. Koedinger, K. R., Carvalho, P. F., Liu, R. & McLaughlin, E. A. (2023). An astonishing regularity in student learning rate. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 120(13), e2221311120. https://doi.org/10.1073/pnas.2221311120

10. Kumar, A., Benjamin, A. S., Heathcote, A. & Steyvers, M. (2022). Comparing models of learning and relearning in large-scale cognitive training data sets. npj Science of Learning, 7(1), Art. 24. https://doi.org/10.1038/s41539-022-00142-x

11. Xiao, Q. & Wang J. (2024). DRL-SRS: Reinforcement Learning for Personalized Scheduling in Spaced Repetition Systems. Applied Sciences, 14(13), Art. 5591. https://doi.org/10.3390/app14135591

12. Liu, S., Li, Q., Shen, X., Sun, J. & Yang, Z. (2024). Automated discovery of symbolic laws governing skill acquisition from naturally occurring data. Nature Computational Science, 4(5), 334–345. https://doi.org/10.1038/s43588-024-00629-0

13. Lu, M., Marghetis, T. & Yang, V. C. (2025). A first-principles mathematical model integrates the disparate timescales of human learning. npj Complexity, 2(1). https://doi.org/10.1038/s44260-025-00039-x

14. Koenig, B. C., Spratt, J. J., Sitzmann, V., Bar-Sinai, Y., Lippe, P., Mohr, A., Schaefer, L., Pfaff, T. & Holl, P. (2024). KAN-ODEs: Kolmogorov-Arnold Networks for learning ordinary differential equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 432, Art. 117397. https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117397

15. Wu, R., Zong, Z., Yu, J., Zhang, S. & Yi, Z. (2024). Attractors coexistence and representation research of Lotka–Volterra recurrent neural networks by matrix analysis theory. Neurocomputing, Art. 128040. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2024.128040

16. Wesselkamp, M., Moser, N., Kalweit, M., Boedecker, J. & Dormann, C. F. (2024). Process-Informed Neural Networks: A Hybrid Modelling Approach to Improve Predictive Performance and Inference of Neural Networks in Ecology and Beyond. Ecology Letters, 27(11), e70012. https://doi.org/10.1111/ele.70012

17. Wang, H., Wu, Q., Bao, C., Ji, W. & Zhou, G. (2025). Research on knowledge tracing based on learner fatigue state. Complex & Intelligent Systems, 11. https://doi.org/10.1007/s40747-025-01831-x

Чорний, Олексій Петрович.
д-р техн. наук, професор, професор кафедри систем автоматичного управління та електроприводу,
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського.
вул. Університетська, 20, м. Кременчук Полтавської обл., Україна, 39600.

Chornyi, Oleksii Petrovych.
Dr. Sc. (Tech.), Prof., Professor of Department of Systems of Automatic Control and Electric Drive
Mykhailo Ostrohradskyi Kremenchuk National University
vul. Universytetska, 20, Kremenchuk, Poltava Region, Ukraine, 39600.

E-mail: alekseii.chornyi@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8270-3284
Researcher ID: https://www.webofscience.com/wos/author/record/P-3527-2018
Scopus ID: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57039206300

Герасименко, Лариса Віталіївна.
д-р пед. наук, професор, професор кафедри психології, педагогіки та філософії,
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського.
вул. Університетська, 20, м. Кременчук Полтавської обл., Україна, 39600.

Herasymenko, Larysa Vitaliivna.
Dr. Sc. (Pedagogik.), Prof., Professor of Department of Psychology, Pedagogy and Philosophy
Mykhailo Ostrohradskyi Kremenchuk National University.
vul. Universytetska, 20, Kremenchuk, Poltava Region, Ukraine, 39600.

E-mail: gerasimenko24@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3725-8681
Researcher ID: https://www.researcherid.com/rid/U-7685-2017
Scopus ID: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57211998313

Citation (APA):
Chornyi, O., Herasymenko, L. (2026). Mathematical modeling of the learning process based on predator-prey interactions. Engineering and Educational Technologies, 14 (2), 43–53. doi: https://doi.org/10.32782/2307-9770.2026.14.02.04

Цитування (ДСТУ 8302:2015):
Чорний О. П., Герасименко Л. В. Математичне моделювання процесу навчання на основі взаємодії типу «хижак–жертва» / Інженерні та освітні технології. 2026. Т. 14. № 2. С. 43–53. doi: https://doi.org/10.32782/2307-9770.2026.14.02.04

Обсяг статті: сторінок – 11 ; умовних друк. аркушів – 1,593.